ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.12 1981

Е.В.Скрыдлова

О ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ, ПОРОЖДЕННЫХ КВАДРИКОЙ И ТОЧКОЙ

В трехмерном проективном пространстве P_3 продолжается (см.[1]) исследование одного из классов вырожденных конгруэнций $(QP)_{1,2}$ [2], порожденных квадрикой Q, описывающей однопараметрическое семейство, и точкой P, описывающей поверхность. Построена проективно-дифференциальная геометрия поверхности Σ, ассоциированной с исследуемым многообразием: найдено ее каноническое представление, директрисы Вильчинского, исследована конгруэнция квадрик Ли этой поверхности, получен ряд свойств этих геометрических образов.

Пусть τ -касательная плоскость к поверхности (P) в точке P, а π -плоскость, полярно сопряженная этой точке относительно соответствующей ей квадрики Q. Исследование конгруэнции $(QP)^{\circ}_{1,2}$ проводим в репере $R=\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, в котором вершина A_0 совпадает с точкой P, вершины A_1 и A_2 являются точками квадрики Q, принадлежащими линии пересечения плоскостей τ и π, а вершина A_3 является полюсом плоскости τ относительно квадрики. Единичную точку $E_{12}=A_1+A_2$ прямой $[A_1A_2]$ совместим с точкой пересечения этой прямой с касательной к линии Γ_Q, соответствующей на поверхности (P) неподвижной квадрике Q. Линию пересечения квадрики Q с плоскостью τ назовем коникой C.

В работе [1] исследована конгруэнция $(QP)^{\circ}_{1,2}$, т.е. такая конгруэнция $(QP)_{1,2}$, у которой конгруэнция коник

C расслояема к прямолинейной конгруэнции (A_0A_3), и асимптотическая сеть на поверхности (P) огибается прямыми $[A_0A_1]$ и $[A_0A_2]$. Доказано [1], что конгруэнция $(QP)^{\circ}_{1,2}$ определяется вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа

$$\omega^j_i=0,\quad \omega^3_i=\beta\,\omega^j,\quad \omega^i_3=\frac{\beta}{2}(\omega^i+\omega^j);\quad \omega^3_0=0, \tag{1}$$
$$\omega^0_3=\lambda(\omega^1-\omega^2),\quad \omega^0_i=\frac{1}{2}\beta^2(\omega^i-\omega^j)+\omega^j,\quad \omega^1_1+\omega^2_2-2\omega^0_0=0,$$
$$\beta(\omega^0_0-\omega^3_3)=\omega^0_3,\quad \beta(\omega^2_2-\omega^1_1)=2\lambda(\omega^1+\omega^2),\quad d\beta=\omega^0_3,$$
$$d\lambda-\left(\frac{2\lambda^2}{\beta}+\frac{\beta}{2}\right)(\omega^1-\omega^2)=0,$$

где формы $\omega^i_0 \overset{def}{=} \omega^i$ приняты в качестве базисных, $i, j, k=1,2$, причем $i\neq j$, и суммирование по индексам i,j не производится. Предполагается также, что $\omega^0_3\neq 0$, т.е. класс конгруэнций $(QP)^{\circ}_{1,2}$, в котором вершина A_3 является характеристической точкой плоскости π, из рассмотрения исключен.

Поверхностью Σ будем называть поверхность (A_3). Асимптотическая сеть этой поверхности соответствует асимптотической сети поверхности (P).

Квадрика Ли поверхности Σ определяется как поверхность второго порядка, проходящая через три близких асимптотических касательных одного семейства, взятых вдоль асимптотической линии второго семейства, и задается уравнением

$$F\equiv\beta^2(x^0)^2-2\lambda\beta x^0x^1+2\lambda\beta x^0x^2-\frac{1}{2}\beta^4(x^1)^2-\frac{1}{2}\beta^4(x^2)^2+$$
$$+(\beta^4-4\lambda^2)x^1x^2-2\lambda\beta^2x^1x^3+2\lambda\beta^2x^2x^3=0. \tag{2}$$

Имеем

$$dF=2\left(Q+\frac{2}{\beta}\omega^0_3-\omega^0_0\right)F-\beta\omega^1\Phi_1-\beta\omega^2\Phi_2,$$

где

$$\Phi_i\equiv\beta x^0(x^i+x^j)+(-1)^j2\lambda(x^i+x^j)x^j+\beta^2(x^i-x^j)x^3, \tag{3}$$

а θ -форма пропорциональности из уравнений стационарности точки проективного пространства.

Фокальное многообразие [3] квадрики Ли определяется системой уравнений

$$F=0,\quad \Phi_1=0,\quad \Phi_2=0$$

и состоит из четырехкратного фокуса A_3 и точек

$$M_i=\mathcal{D}+(-1)^j\sqrt{2}\beta^2A_0,\quad M_{i+2}=\frac{\sqrt{2}}{\beta}(\lambda\mathcal{D}-\beta^3A_3)+(-1)^j\beta^2E_{12},$$

где $\mathcal{D}=2\lambda A_0+\beta(A_1-A_2)$.

Директрисы Вильчинского поверхности Σ определяются как оси специальных линейных комплексов, содержащихся в пучке соприкасающихся линейных комплексов этой поверхности, и совпадают с прямыми $d_1=[A_0,\mathcal{D}]$ и $d_2=[A_0,E_{12}]$.

Т е о р е м а I. Фокальные точки M_i квадрики Ли поверхности Σ гармонически разделяют точку P с точкой пересечения директрисы Вильчинского d_1 этой поверхности с плоскостью τ.

Доказательство теоремы следует из равенства $(A_0,\mathcal{D};M_1,M_2)=-1$ с учетом того, что $\mathcal{D}$ является общей точкой директрисы d_1 с плоскостью τ.

Перейдем в пространстве P_3 к нормальному реперу R^*[4] поверхности Σ, состоящему из точек $B_0\equiv A_3$, $B_3\equiv\mathcal{D}$, а также $B_i\equiv\beta(A_1+A_2)+(-1)^j2\lambda A_0$ -точек пересечения асимптотических касательных этой поверхности с второй ее директрисой Вильчинского. Отметим, что единичные точки E_{12} реперов R и R^* совпадают. Система дифференциальных уравнений конгруэнции $(QP)^0_{1,2}$ относительно нормального репера R^* будет иметь вид

$$\begin{gathered}\tilde\omega^0_0=-\frac{3\lambda}{2\beta}(\tilde\omega^1-\tilde\omega^2),\quad \tilde\omega^3_0=0,\quad \tilde\omega^0_i=2\beta^2(\tilde\omega^i+\tilde\omega^j),\\ \tilde\omega^j_i=(-1)^i\frac{\beta}{\lambda}\tilde\omega^i,\quad \tilde\omega^3_i=-\frac{4\lambda}{\beta}\tilde\omega^j,\quad \tilde\omega^0_3=2\beta^2(\tilde\omega^2-\tilde\omega^1),\\ \tilde\omega^i_i=(-1)^j\left(\frac{9\lambda}{2\beta}\tilde\omega^i-\frac{\lambda}{2\beta}\tilde\omega^j+\frac{\beta}{\lambda}\tilde\omega^i\right),\quad \tilde\omega^i_3=\frac{\beta^3}{2\lambda}(\tilde\omega^i-\tilde\omega^j),\\ \tilde\omega^3_3+3\tilde\omega^0_0=0,\quad d\lambda=\left(\frac{4\lambda^2}{\beta}+\beta\right)(\tilde\omega^1-\tilde\omega^2),\quad d\beta=2\lambda(\tilde\omega^1-\tilde\omega^2),\end{gathered}\tag{4}$$

где формы $\tilde\omega^i_0\overset{def}{=}\tilde\omega^i$ приняты в качестве базисных.

Т е о р е м а 2. Для конгруэнции $(QP)^0_{1,2}$ справедливы следующие утверждения: 1/ фокусами директрисы d_1 являются точки $\mathcal{D}$ и M, где $M=\lambda B_3-\beta^3B_0$ -характеристическая точка плоскости (B_0,E_{12},B_3); 2/ фокусами директрисы d_2 являются точки P и E_{12}; 3/ существуют односторонние расслоения от прямолинейных конгруэнций (B_0,B_1-B_2) и (B_3,B_1-B_2) соответственно к конгруэнциям (B_3,E_{12}) и (B_0,E_{12}), а также от конгруэнций (A_0,A_1-A_2) и (A_3,A_1-A_2) к конгруэнциям (A_3,E_{12}) и (A_0,E_{12}); 4/ конгруэнции директрис Вильчинского поверхности Σ образуют двусторонне расслояемую пару; 5/ фокусы M_3 и M_4 квадрики Ли поверхности Σ гармонически разделяют точки E_{12} и M.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждений 1/ и 2/ теоремы вытекает из анализа уравнений, определяющих фокусы директрис d_1 и d_2; 3/ условия односторонних расслоений указанных в условии теоремы пар конгруэнций тождественно удовлетворяются в силу систем уравнений (1) и (4); 4/ условия двустороннего расслоения конгруэнций директрис Вильчинского поверхности Σ имеют вид

$$\begin{gathered}\tilde\omega^k_3\wedge\tilde\omega^0_k=0,\quad \tilde\omega^k_0\wedge\tilde\omega^0_k-\tilde\omega^k_3\wedge\tilde\omega^3_k=0,\\ \tilde\omega^k_0\wedge\tilde\omega^3_k=0,\quad \tilde\omega^0_i\wedge\tilde\omega^j_0+\tilde\omega^3_i\wedge\tilde\omega^j_3=0,\\ \tilde\omega^0_1\wedge\tilde\omega^1_0+\tilde\omega^3_1\wedge\tilde\omega^1_3-\tilde\omega^0_2\wedge\tilde\omega^2_0-\tilde\omega^3_2\wedge\tilde\omega^2_3=0\end{gathered}$$

и удовлетворяются в силу системы (4); 5/ последнее утверждение теоремы следует из равенства

$$(E_{12},M;M_3,M_4)=-1.$$

Теорема доказана.

Для поверхности Σ найдено ее каноническое представление относительно репера R^*:

$$z=-\frac{4\lambda}{\beta}xy-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{3}y^3+[4],$$

а также трехпараметрическое семейство ее соприкасающихся квадрик:

$$b_{33}(x^3)^2+2b_{13}x^1x^3+2b_{23}x^2x^3+2x^0x^3+\frac{8\lambda}{\beta}x^1x^2=0,$$

из которого выделен при $b_{13}'=b_{23}=0$ пучок квадрик Дарбу этой поверхности. Линии Дарбу и Сегре на поверхности Σ задаются соответственно уравнениями

$$\tilde{\omega}^1-\varepsilon\tilde{\omega}^2=0, \quad \tilde{\omega}^1+\varepsilon\tilde{\omega}^2=0,$$

где ε -любое из значений $\sqrt[3]{1}$.

Список литературы

1. С к р ы д л о в а Е.В., Говорков А.В. Об одном классе вырожденных конгруэнций, порожденных квадрикой и точкой.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.II.Калининград,1980,с.82-87.

2. М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3.Калининград,1973,с.41-49.

3. М а л а х о в с к и й В.С.,Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.-Тр.геометр. семинара. ВИНИТИ АН СССР,1974,6,с.113-133.

4. Ф и н и к о в С.П. Проективно-дифференциальная геометрия.М.-Л.,ОНТИ,1937.

Е.П.С о п и н а

О ПОЛЯХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА МНОГООБРАЗИИ V_{n-1}

Исследуются поля геометрических объектов на (n-1)-мерном многообразии (конгруэнции) V_{n-1} центральных невырожденных гиперквадрик в n-мерном аффинном пространстве A_n.

Конгруэнции V_{n-1} гиперквадрик $Q_{n-1}\in A_n$ в репере нулевого порядка индуцированной фигуры $R=\{A,\bar{e}_\alpha\}$, где A -центр гиперквадрики, определяются системой уравнений Пфаффа

$$\begin{cases} \nabla a_{\alpha\beta}=b_{\alpha\beta,i}\,\omega^i, \\ \omega^n=c_i\,\omega^i \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,\dots,n;\ i,j,k=1,\dots,n-1), \end{cases} \tag{1}$$

где $a_{\alpha\beta}$ -коэффициенты уравнения гиперквадрики Q_{n-1}, а ω^α, ω^β_α -компоненты деривационных формул репера, удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства:

$$\mathcal{D}\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega^\alpha_\beta, \quad \mathcal{D}\omega^\beta_\alpha=\omega^\gamma_\alpha\wedge\omega^\beta_\gamma.$$

Рассмотрим систему величин $\{\hat{a}_{ij}\}$

$$\hat{a}_{ij}=a_{ij}+a_{nn}c_i c_j+a_{in}c_j+a_{jn}c_i. \tag{2}$$

Учитывая уравнения (1.6) [1], находим

$$\delta\hat{a}_{ij}=\hat{a}_{ik}\pi^k_j+\hat{a}_{kj}\pi^k_i+c_j\hat{a}_{ik}\pi^k_n+c_i\hat{a}_{jk}\pi^k_n. \tag{3}$$

Следовательно, система величин $\{\hat{a}_{ij},c_k\}$ образует геометрический объект, который определяет (n-2)-мерную инва-